Université de Rennes 1 **Année 2019/2020**

Outils Mathématiques 4: recueil d'exercices de TD

0. Calcul de primitives

Exercice 0.1. Calculer les primitives suivantes:

1. $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx,\ \int \cos^2(x)\sin^3(x)dx,\ \int \cos(x)\sin^4(x)dx.$

2. $\displaystyle\int \sin^3(x)dx,\ \int \cos^4(x)dx.$

Exercice 0.2. Calculer: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin^2(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sin(4x)dx$

1. Intégrales doubles

Exercice 1.1. Calculer les intégrales $\displaystyle\iint_D f(x,\ y)\ dxdy$ pour les choix suivants de f et D:

$f(x,y)$	D la surface délimitée par
$y-2x$	le carré de sommets $(-1,1),\ (2,1),\ (2,4),\ (-1,4)$,
$x-y$	le triangle de sommets $(2,\ 9),\ (2,\ 1),\ (-2,1)$,
xy^2	le triangle de sommets $(0,0),\ (3,1),\ (2,1)$,
$y+1$	$y=\sin x, y=\cos x, x=0, x=\pi/4$,
$x^3\cos(xy)$	$y=x^2,\ y=0,\ x=2$,
$(x+y)\exp(x-y)$	$\lvert x\rvert \leqslant 1,\ \lvert y\rvert \leqslant 2$.

Exercice 1.2. Pour chacune des intégrales itérées suivantes, calculer la valeur de l'intégrale en intervertissant l'ordre d'intégration.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2x}^2 \exp(y^2)\ \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int_0^9 \left(\int_{\sqrt{y}}^3 \sin(x^3)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$

3. $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$

4. $\displaystyle\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} y\mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y.$

Exercice 1.3. Dans la suite f désigne une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Dans les cas où la région D est délimitée par les courbes dont les équations sont données ci-dessous, déterminer explicitement D et exprimer l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dxdy$ comme une intégrale itérée.

1. $8y = x^3,\ y - x = 4,\ 4x + y = 9,$

2. $x = 2\sqrt{y},\ \sqrt{3}x = \sqrt{y},\ y = 2x + 5,$

3. $x = \sqrt{3-y},\ y = 2x,\ x + y + 3 = 0,$

4. $y = \exp(x),\ y = \ln(x),\ x + y = 1,\ x + y = 1 + e,$

5. $y = \sin(x),\ \pi y = 2x.$

Exercice 1.4. Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 1.5. **a**) Calculer $\displaystyle\iint_D (x - y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation : $x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$

Exercice 1.6. Calculer $\displaystyle\iint_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 1.7. Soit D le quart de disque unité défini par : $D = \{(x, y)|\ \ 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\iint_D (4 - x^2 - y^2)\ dxdy.$

Exercice 1.8. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, définie comme $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2} dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons
le quart de disque $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ x^2 + y^2 \leqslant n^2, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ et le carré $C_n = [0, n] \times [0, n]$.

1. Calculer les intégrales $J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ et $J_{2n} = \iint_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

2. Considérons l'intégrale $K_n = \iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.

3. En utilisant un dessin (représentant $D_n,\ C_n$ et D_{2n}) expliquer pourquoi $J_n \leqslant K_n \leqslant J_{2n}$.

4. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de J_n et de J_{2n} ? et de K_n ? En déduire la valeur de I.

Exercices supplémentaires:

Exercice 1.9. Dans la suite f désigne une fonction continue sur le domaine d'intégration. Intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy \right) dx$

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy \right) dx$

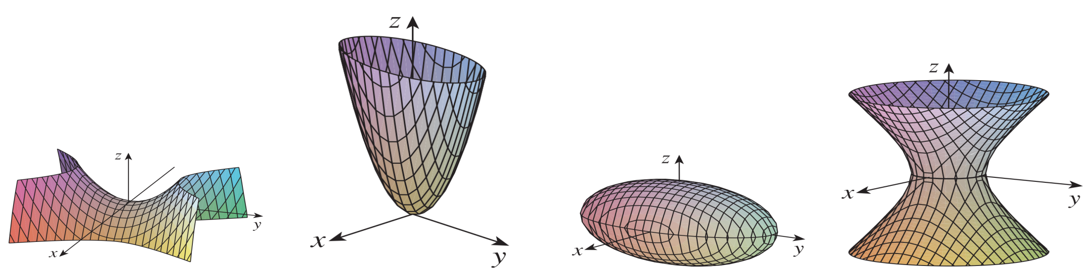
Exercice 1.10. Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\, dxdy$ où $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0; y \geqslant 0; x+y \leqslant a\}$ et $a > 0$. Calculer I à l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = tu \\ y = (1-t)u \end{cases}$

Exercice 1.11. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. En utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que $\displaystyle\iint_{T_1} xy\ dxdy = \iint_{T_2} xy\ dxdy$.
Donner un exemple d'une fonction continue $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\iint_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \iint_{T_2} f(x,y)\ dxdy$.

2. Intégrales triples

Exercice 2.1. Soit D le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+2y+z \leqslant 1\}$. Représenter graphiquement D. Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_D x\, dx\, dy\, dz$
(a) en intégrant “par piles”, (b) en intégrant “par tranches”.

Exercice 2.2. Associer à chaque équation son graphe:
$a)\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1 \qquad b)\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \qquad c)\ z = -x^2 + y^2 \qquad d)\ z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$



1) 2) 3) 4)

Exercice 2.3. Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.

Exercice 2.4. Calculer l'intégrale triple: $\displaystyle\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ où B est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 2.5. Calculer l'intégrale triple: $\displaystyle\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par le demi l'ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et par le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 2.6. Calculer l'intégrale triple: $\displaystyle\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ et le plan $z = h$.

Exercices supplémentaires:

Exercice 2.7. Calculer l'intégrale triple: $\displaystyle\iiint_V dx\, dy\, dz$ où V est le domaine limité par la surface d'équations $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ et $x^2+y^2 = z^2$ et contenant le point $(0,0,R)$.

Exercice 2.8. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_V (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$ où V est la partie commune au paraboloïde $\{2az \geqslant x^2+y^2\}$ et à la boule $\{3a^2 \geqslant x^2+y^2+z^2\}$.

Barycentre et moment d'inertie

Exercice 2.9. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Quelles sont les coordonnées de son barycentre, sous l'hypothèse que le matériau de construction est homogène ?

Exercice 2.10. Une plaque d'un matériau a la forme d'une surface délimitée par la parabole $x=y^2$ et la droite $x=4$. La densité de masse par unité de surface, ρ, est proportionnelle à la distance du point de l'axe Oy. Déterminer les coordonnées du barycentre de la plaque.

Exercice 2.11. Un solide a la forme d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h. La densité volumique ρ du matériau varie avec la hauteur; elle est proportionnelle à la distance du point à la base du cylindre. Calculer le moment d'inertie du solide autour de son axe de révolution.

Exercice 2.12. On considère trois figures planes dans le plan Oxz:
–Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0),(a,0),(a,\ h)$ et $(0,\ h)$.
–Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0),(a,0)$ et $(0,\ h)$.
–Un demi-cercle C de centre $(0,0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geqslant 0$.
Pour chacune de ces 3 figures, calculer: (a) l'aire S, (b) l'abscisse c de son centre de gravité, (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz.

Comparer $2\pi cS$ et V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion et la démontrer en toute généralité ?

Exercice 2.13. Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 2.14. Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1+\cos\theta$.

3. Intégrales curvilignes

Exercice 3.1. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$
où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d?une montre).

Exercice 3.2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$

Exercice 3.3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\,dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\,dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dz$ lorsque:

1) γ est le segment de droite d'origine $A=(1,1,1)$ et d'extrémité $B=(2,2,2)$.
2) γ est l'hélice définie par $x=\cos t$, $y=\sin t$ et $z=t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 3.4. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy$ lorsque:

1) Γ est le segment de droite d'origine $A=(1,0)$ et d'extrémité $B=(0,1)$.
2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1 d'origine $A=(1,0)$ et d'extrémité $B=(0,1)$.

Exercice 3.5. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est nulle lorsque Γ est un arc simple fermé (sans calcul de primitive).

Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limité en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geqslant 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A.

Calculer une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\,dx + x^2y\,dy$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exercice 3.6. Déterminer une fonction u, dont on précisera le domaine de définition, telle que:

$$du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$$

Exercice 3.7. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ avec:

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x > 0,\ y > 0\}$, ω est une forme différentielle totale.

2) Déterminer u dans D, telle que $du = \omega$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par: $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Exercice 3.8.

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2+4y^2-4 = 0; y \geqslant 0$ parcourue une fois dans le sens direct.

2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 3.9. Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$:

1. le long de la droite (OC).

2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\overrightarrow{i} + (y+xz)\overrightarrow{j} + (z+xy)\overrightarrow{k}$.

Exercice 3.10. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2+y^2-2y = 0$ parcouru dans le sens direct.
Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2)dxdy$.

Exercice 3.11. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct où $I = \displaystyle\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy$.
Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercices supplémentaires:

Exercice 3.12. Le *follium de Descartes* est une courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

1. Montrer que l'équation de la courbe en coordonnées polaires est $r = 3a\dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}$.

2. En posant $y = tx$, montrer que la courbe peut aussi être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par

$$x = 3a\frac{t}{1+t^3},\ y = 3a\frac{t^2}{1+t^3}.$$

3. Utiliser cette dernière paramétrisation pour calculer, à l'aide de la formule de Green-Riemann, l'aire de la surface délimitée par la boucle du follium.

Exercice 3.13. *Aire en coordonnées polaires.* Soit D le domaine limité par $r = p(\theta)$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; et le segment $\begin{cases} \theta = 0 \\ p(0) \leqslant r \leqslant p(2\pi). \end{cases}$ Montrer que l'aire de D est égale à $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\,d\theta$.

Trouver l'aire: **a**) de la cardioïde : $r = a(1+\cos(\theta))$, **b**) de l'escargot : $r = a\theta$, $(a > 0)$.

Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y.

Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.

4. Intégrales de Surface

Exercice 4.1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x, y, -z)$ à travers la demi-sphère $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$

Exercice 4.2. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x+z = 1 \end{cases}$

1. directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Exercice 4.3. On considère l'intégrale $\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, où C est le cercle d'équations $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes.
Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Exercice 4.4. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2+y^2+z^2 = R^2$: 1) Directement 2) A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

Exercice 4.5. On considère la boite cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2+y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$ $(a > 0$ et $b > 0)$ et des deux disques de rayon a aux niveaux $z = 0$ et $z = b$.
On définit le champ de vecteurs $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{v}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Calculer directement le flux de $\vec{v}$ à travers S.
2. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercices supplémentaires:

Exercice 4.6. Soit Σ la partie $z \geqslant 0$ de la surface décrite par le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$.

1. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + z\vec{e_z}$ à travers Σ.
2. On note L la trace de Σ sur le plan Oxy (il s'agit d'un cercle dont on calculera l'équation). Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $\vec{F} = 3z\vec{e}_x + 4x\vec{e}_y + 2y\vec{e}_z$, i.e. l'égalité

$$\iint_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n}\mathrm{d}\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$